

Tentamen Toegepaste Quantum Fysica 7-3-1997

March 7, 1997

Voor elke opgave dient u een apart vel te gebruiken.

Opgave 1. Atoom in een elektrisch kristalveld. (30 punten)

Een atoom heeft een impulsmoment j in de grondtoestand, waarvoor geldt $\mathbf{J}^2 | \Psi_0 \rangle = j(j+1)\hbar^2 | \Psi_0 \rangle$. Het bevindt zich in een vaste stof. De nabuuratomen veroorzaken een electrostatisch veld ter plaatse van het atoom. Als de symmetrie van de omgeving lager is dan kubisch ontstaat er hierdoor een wisselwerking van de volgende vorm:

$$H = D \frac{3J_z^2 - j(j+1)\hbar^2 + \eta(J_x^2 - J_y^2)}{\hbar^2}$$

η is een maat voor de afwijking van axiale symmetrie, en D is een constante. Door de assen slim te kiezen (z-as langs de grootste afwijking van kubische symmetrie) kunnen we ervoor zorgen dat $0 \leq \eta \leq 1$.

a) Laat zien dat deze Hamiltoniaan ook geschreven kan worden als:

$$H = D \frac{3J_z^2 - j(j+1)\hbar^2 + \frac{1}{2}\eta[J_+^2 + J_-^2]}{\hbar^2}$$

Voor de ladderoperatoren J_+ en J_- geldt: $J_{\pm} | j, m \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} | j, m \pm 1 \rangle$

Neem in het volgende aan dat $j=1$.

b) Geef de matrixelementen $\langle j, m' | H | j, m \rangle$.

c) Druk de energieniveaus behorende bij H uit in de parameters D en η .

d) Geef de bijbehorende eigenvectoren, uitgedrukt in de basis $| 1, -1 \rangle$, $| 1, 0 \rangle$, en $| 1, 1 \rangle$.

Opgave 2. Larmor precessie (30 punten)

Een systeem van magnetische atomen bevindt zich in een magnetisch veld B_0 , gericht langs de z-as. De grondtoestand van ieder atoom wordt gekarakteriseerd door $L = 0$, $S = 1/2$. Op het tijdstip $t=0$ wordt de golf functie van de spin van ieder atoom gegeven door:

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{|-1/2\rangle + |1/2\rangle}{\sqrt{2}}$$

a) Toon aan dat $|\Psi(t)\rangle$ geschreven kan worden als

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{\exp(i\omega_L t)|-1/2\rangle + \exp(-i\omega_L t)|1/2\rangle}{\sqrt{2}},$$

en geef de relatie tussen ω_L and B_0 .

b) Bereken de verwachtingswaarden $\langle S_x(t) \rangle$, $\langle S_y(t) \rangle$, en $\langle S_z(t) \rangle$.

c) Bereken de elementen van de dichtheidsmatrix $\rho_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2$) voor een willekeurig tijdstip, als aangenomen mag worden dat het systeem geen enkele andere interactie heeft dan met het magnetisch veld B_0 .

d) Geef aan hoe de matrixelementen $\rho_{ij}(t)$ zich als functie van de tijd ontwikkelen, als het magneetveld enigszins inhomogeen is, d.w.z. over het preparaat varieert met een karakteristieke waarde ΔB . (Hier wordt geen exact resultaat gevraagd.)

Opgave 3. Electron in een elektrisch veld (20 punten)

Een electron beweegt in een een-dimensionale potentiaalput met oneindig hoge randen bij $x = 0$ en $x = L$.

a) Bereken de genormeerde eigenfuncties en de energietoestanden van het electron.

Het electron wordt nu gebracht in een constant elektrisch veld E in de positieve x -richting. Kies het nulpunt van de bijbehorende potentiaal $V(x)$ als volgt: $V(0)=0$. Veronderstel dat het elektrische veld beschouwd kan worden als een kleine storing op de beweging van het electron.

b) Bereken de energietoestanden van het electron in het elektrische veld met behulp van eerste orde storingsrekening. (Hint: vermijd het gereken aan integralen, en gebruik de symmetrie van het probleem.)

Opgave 4. Lasermedium (20 punten)

Beschrijf waaraan een 2-niveausysteem moet voldoen om geschikt te zijn voor een laser medium. Wat is het verschil tussen de "collisionless" en "collision dominated" regimes, en welk regime is van toepassing op een laser medium. Leg uit waarom.